MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 4
08.05.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)"

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009*

   Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

   b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

   Hinweis:
   Verwenden Sie bei Teilaufgabe a) Satz 8.4. Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren wird in den nächsten Wochen Hauptbestandteil der Vorlesung sein, daher sollten Sie sich vergewissern, dass Sie diese Methode beherrschen.

2. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Berechnen Sie eine mögliche Matrix A!
   Hinweis:
   Benutzen Sie die beiden Eigenwertgleichungen $Av_{1/2} = \lambda_{1/2} v_{1/2}$ um die vier unbekannten Einträge der Matrix A zu berechnen.
   Bemerkung: Mit Hilfe dieser Methode kann eine Matrix A konstruiert werden, dessen Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt sind. Dies ist natürlich für die Erstellung von Aufgaben hilfreich und wird daher oft verwendet.

3. *nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*

   Es sei V der Vektorraum der reellen 3×3 Matrizen. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^{2012}.
Hinweis:
Berechnen Sie A^2 und A^3 und überlegen Sie sich, wie Sie mit Hilfe dieser Ergebnisse A^{2012} effizient berechnen können.

b) Berechnen Sie auch A^{2015}.

c) Zeigen Sie ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms, dass die möglichen Eigenwerte von A nur den Wert 1 annehmen können.
Hinweis: In dem letzten Tutoriumsblatt haben Sie gezeigt, dass die lineare Abbildung π nur die Eigenwerte 0 oder 1 besitzen kann. Wiederholen Sie den Beweis und überlgen Sie sich, wie Sie einen ähnlichen Beweis führen können.

d) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und $A - A^2$ jeweils nur einen reellen Eigenwert haben und zeigen Sie ferner, dass die dazugehörenden Eigenvektoren übereinstimmen.
Hinweis: Verwenden Sie wieder Satz 8.4.

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2002*

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Matrix den Eigenwert 3 besitzt.
Bermerkung:
Der Aufgabensteller ist hier gnädig mit den Studenten, die das charakteristische Polynom einfach ausmultipliziert haben. Die Angabe eines Eigenwertes erlaubt es, die erste Nullstelle zu faktorisieren.

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix A.